JOURNAL OF NUMBER THEORY 22, 4–20 (1986)

Lemme de Bohl pour les suites de Van Der Corput generalisées

HENRI FAURE

U.E.R de Mathématiques, Université de Provence, 3, Place Victor Hugo, 13331 Marseille Cedex 3, France

Communicated by W. Schmidt

Received July 10, 1983

The remainders about two intervals of equal length are related by the Bohl lemma when the sequences are the $(n\alpha)$ ones. In this paper, we prove a similar result for the generalised Van Der Corput sequences, and, as a consequence, we get the asymptotic behaviour of the remainder about any interval, by means of its length only.

1. INTRODUCTION

Ce travail est le prolongement naturel de l'étude des restes pour les suites de Van Der Corput généralisées [3]. Le *reste à l'équirépartition* (ou *écart*) d'une suite $X = (x_i)$ à valeurs dans $[0, 1]$ est défini par:

$$E(J, T, X) = A(J, T, X) - |T|\,|J|,$$

avec $A(J, T, X) = \operatorname{card}\{i \in T; x_i \in J\}$, T intervalle d'entiers de cardinal $|T|$ et J intervalle de $[0, 1[$ de longueur $|J|$; pour $T =]0, N]$, on note $E(J, T, X) = E(J, N, X)$.

Le *lemme de Bohl* [1] relie les restes relatifs à deux intervalles de même longueur dans le cas des suites $(n\alpha)$: *étant dinnés un entier $N \geqslant 1$ et J, J' deux intervalles tels que $|J| = |J'|$, il existe un entier $N' \geqslant 1$ tel que*

$$E(J, N, (n\alpha)) = E(J',]N', N' + N], (n\alpha)).$$

Cette propriété permet de ramener l'étude des restes pour un intervalle quelconque à celle des restes pour un intervalle à l'origine; sa démonstration, très rapide, repose sur la densité de la suite $(n\alpha)$ et sur l'invariance de $A(J, N, (n\alpha))$ pour des intervalles translatés d'un multiple de $\alpha \pmod 1$. Pour les suites de Van Der Corput, on ne connait pas d'équivalent à ce lemme, probablement en raison du comportement beaucoup plus complexe

0022-314X/86 $3.00

lorsqu'on translate les intervalles. En fait, il existe bien des relations, mais seulement quand on "discrétise" les intervalles; leur complexité dépend des suites envisagées, et leur démonstration demande beaucoup plus d'efforts que pour les suites $(n\alpha)$.

Le résultat présente les mêmes avantages, et permet de déterminer le comportement asymptotique du reste pour un intervalle quelconque, en fonction de sa seule longueur; il en résulte évidemment la caractérisation des intervalles à restes bornés.

Nour ferons souvent appel à deux articles précédents où sont introduites les suites de VDC généralisées [2] et où sont étudiés les restes à l'origine pour ces suites [3]; ce travail complète leur connaissance et confirme une fois de plus leur parenté avec les suites $(n\alpha)$.

Comme pour celles-ci, la théorie ergodique donne des résultats dans la recherche des intervalles à restes bornés: récemment Hellekalek [4] a ainsi obtenu leur caractérisation et une réponse partielle à la même question pour les suites de Halton dans $\mathbb{T}^s$; cependant les méthodes ergodiques ne donnent aucun renseignement sur le comportement asymptotique des restes, et seules les méthodes "élémentaires" ont permis jusqu'à présent un tel approfondissement. Le paragraphe 2 contient les définitions et résultats, les paragraphes 3 et 4 sont consacrés aux démonstrations.

2. Définitions et Résultats

2.1. Définitions et notations. Les suites de VDC généralisées sont les suites S_r^Σ, introduites dans [2], et définies comme suit:

Étant donnés un entier $r \geqslant 2$ et une suite, $\Sigma = (\sigma_j)_{j \geqslant 0}$, de permutations σ_j de l'ensemble $B_r = \{0, 1, ..., r-1\}$, on pose

$$S_r^\Sigma(n) = \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j(a_j(n))\, r^{-j-1} \qquad \text{avec } n-1 = \sum_{j=0}^{\infty} a_j(n)\, r^j.$$

On peut en fait définir des suites un peu plus générales en faisant varier la base r (voir les suites S_R^Σ, 3.4 [2]), mais leur intérêt est limité car elles ne donnent pas de discrépances plus faibles que les suites S_r^Σ.

Notations. Soit un entier $n \geqslant 1$; dans le tore $\mathbb{T}$ identifié à $[0, 1[$, désignons par $\mathbb{T}_n$ l'ensemble des intervalles de la forme $[ir^{-n}, jr^{-n}[$ (ce sont les intervalles "discrétisés"); de même dans $\mathbb{Z}/r^n\mathbb{Z}$ identifié à $]0, r^n]$, notons $\mathscr{C}_n$ l'ensemble des intervalles (d'entiers) de la forme $]H, K]$.

Étant donné un couple (r, σ), soit Z_r^σ la suite finie $(\sigma(0)/r, \sigma(1)/r, ..., \sigma(r-1)/r)$. Pour $J, J' \in \mathscr{T}_1$ tels que $|J| = |J'|$ et pour

$N =]0, N] \in \mathscr{C}_1$, soit $M = M(J, J', N)$ le nombre minimum d'intervalles disjoints T_μ de $\mathscr{C}_1$ tels que $N = |\bigcup_{\mu=1}^{M} T_\mu|$ et

$$E(J, N, Z_r^\sigma) = E\left(J', \bigcup_{\mu=1}^{M} T_\mu, Z_r^\sigma\right).$$

Désignons alors par δ_r^σ le maximum des $M(J, J', N)$ pour $J, J' \in \mathscr{T}_1$ avec $|J| = |J'|$ et pour $N \in \mathscr{C}_1$, et par δ_r le maximum des δ_r^σ pour toutes les permutations σ de B_r.

Il est facile de voir que $[r/3] \leqslant \delta_r \leqslant r/2$; par ailleurs on a toujours $\delta_r^I = 1$ (I permutation identique); et $\delta_2 = \delta_3 = 1$, $\delta_4 = \delta_5 = 2$. Ces notations étant précisées, nous pouvons à présent énoncer les résultats.

2.2. Théorème 1. *Soient un entier $n \geqslant 1$, J, J' deux intervalles de $\mathscr{T}_n$ tels que $|J| = |J'|$ et N un entier tel que $]0, N] \in \mathscr{C}_n$. Alors:*

(i) *cas $r = 2$: il existe $T \in \mathscr{C}_n$ tel que*

$$E(J, N, S_2^\Sigma) = E(J', T, S_2^\Sigma) \text{ et } |T| = N;$$

(ii) *cas $r \geqslant 3$: il existe au plus $2\delta_r$ intervalles $T_\mu \in \mathscr{C}_n$, disjoints, tels que*

$$E(J, N, S_r^\Sigma) = E(J', \bigcup T_\mu, S_r^\Sigma) \text{ et } |\bigcup T_\mu| = N;$$

en particulier, il existe S et $T \in \mathscr{C}_n$, disjoints tels que

$$E(J, N, S_r^I) = E(J', S \cup T, S_r^I) \text{ et } |S \bigcup T| = N.$$

Remarques. Sauf pour le cas $r = 2$, la propriété des suites $(n\alpha)$ ne se retrouve donc pas exactement avec les intervalles discrétisés pour les suites de VDC.

— Si $\Sigma = \sigma$ (suite constante), le nombre d'intervalles nécessaires est au plus $2\delta_r^\sigma$ et il est atteint dans certains cas.

— L'obtention des intervalles T_μ n'est pas toujours explicite pour J, J' et N donnés: nous devons utiliser dans certains cas un théorème de valeurs intermédiaires (voir le Lemme 3.5) qui en assure seulement l'existence; de ce fait, il semble difficile d'obtenir des formules donnant les T_μ en fonction de J, J' et N.

2.3. Application à l'étude asymptotique des restes. L'étude faite pour les intervalles à l'origine [3] donne, avec le Théorème 1, le comportement asymptotique du reste sur un intervalle quelconque en fonction du développement r-adique de sa longueur.

Rappelons les définitions nécessaires [3] pour énoncer le résultat: soit $a \in [0, 1[$ et $y \in]0, \infty]$; on appelle $U_a(y)$ *le nombre de chiffres différents de* 0 *et* $r-1$ *dans le développement de* a *en base* r *jusqu'au rang* $[y]$, *et* $V_a(y)$ *le nombre de couples* $(0, r-1)$ *ou* $(r-1, 0)$ *dans ce même développement;* $v_a(y)$ *est le nombre de couples* $(0, 1)$ *dans les* $[y]$ *premiers termes du développement de* a *en base* 2; $\log_r$ *désigne le logarithme en base* r.

THÉORÈME 2. *Pour toute suite* S_r^{Σ} *et pour tout intervalle* $[a, b[$ *de* $[0, 1[$, *on a les estimations suivantes:*

(i) *cas* $r=2$:

$$|E([a, b[\,, N, S_2^{\Sigma})| \leqslant 4 v_{b-a}(\log_2 N) + 6 \qquad \text{pour tout } N \geqslant 1$$

et

$$|E([a, b[\,, N, S_2^{\Sigma})| \geqslant \frac{1}{4} v_{b-a}(\log_2 N) - 2 \qquad \text{pour une infinité de } N.$$

(ii) *cas* $r \geqslant 3$:

$$|E([a, b[\,, N, S_r^{\Sigma})| \leqslant \delta_r((r+4)\, U_{b-a}(\log_r N) + 4 V_{b-a}(\log_r N)) + O(1)$$

pour tout $N \geqslant 1$ *et*

$$|E([a, b[\,, N, S_r^{\Sigma})| \geqslant \frac{1}{16\delta_r} \left(U_{b-a}(\log_r N) + 2\left(\frac{r-1}{r}\right)^2 V_{b-a}(\log_r N)\right) + O(1).$$

pour une infinité de N.

En particulier, si $\Sigma = I$, *on obtient les inégalités ci-dessus sans le facteur* δ_r. *Le reste* $E([a, b[\,, N, S_r^{\Sigma})$ *est donc dans* 0 *et* Ω *de* $(U_{b-a}(\log_r N) + V_{b-a}(\log_r N))$.

On déduit évidemment de ce théorème la caractérisation des intervalles à restes bornés obtenue précédemment par Hellekalek [4]:

COROLLAIRE. *Pour toute suite* S_r^{Σ}, *l'intervalle* $[a, b[$ *est à restes bornés si et seulement si* $(b-a)$ *est* r*-adique.*

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

3.1. RÉDUCTION DU PROBLÈME. L'écart $E(J, T, S_r^{\Sigma})$, pour $J \in \mathscr{T}_n$ et $T \in \mathscr{C}_n$, s'étudie par récurrence; pour bien décomposer la démonstration, il faut d'abord rappeler comment on peut se ramener à une suite finie de r^n termes (voir 3.1 et 3.2 [3]).

Étant donnée une permutation σ de B_r, on définit σ' par $\sigma'(l) = \sigma(l) + 1 \pmod r$; alors si $\Sigma = (\sigma_j)_{j \geqslant 0}$, pour $n \geqslant 1$, on pose $\rho_n = \sum_{j=n}^{\infty} \sigma_j(0)\, r^{-j-1}$ et on note Σ_n la permutation de B_{r^n} définie par $\Sigma_n = \prod_{j=0}^{n-1} \sigma_j$ si $\rho_n < r^{-n}$ et $\Sigma_n = \prod_{j=0}^{n-2} \sigma_j \cdot \sigma'_{n-1}$ si $\rho_n = r^{-n}$; le produit étant pris au sens suivant: si σ et τ sont respectivement une permutation de B_r et B_s, $\sigma \cdot \tau$ est la permutation de B_{rs} définie par $\sigma \cdot \tau(l) = s\sigma(h) + \tau(k)$ si $l = kr + h$ avec $0 \leqslant h \leqslant r-1$ et $0 \leqslant k \leqslant s-1$ (voir aussi 4.3 [2]). Il est facile de montrer qu'alors $E(J, T, S_r^{\Sigma}) = E(J, T, Z_{r^n}^{\Sigma_n})$ (Lemme 3.2 [3]). Le travail est donc réduit à étudier $\delta_{rs}^{\sigma \cdot \tau}$ en fonction de δ_r^{σ} et δ_s^{τ}. C'est l'objet du lemme ci-dessous dont la démonstration en plusieurs étapes occupera les Sections 3.2 à 3.7.

LEMME FONDAMENTAL. (i) *si* $s = 2$, *on a* $\delta_{rs}^{\sigma \cdot \tau} = \delta_r^{\sigma}$;

(ii) *si* $s \geqslant 3$, *on a* $\delta_{rs}^{\sigma \cdot \tau} \leqslant \max(\delta_r^{\sigma}, \delta_s^{\tau} + (\delta_r^{\sigma} + 1)/2)$,

l'égalité ayant lieu dans certains cas.

Conséquences. $\delta_{2^n}^{\Sigma_n} = 1$, $\delta_{r^n}^{I^n} = 2$ pour $r \geqslant 3$, *et* $\delta_{r^n}^{\Sigma_n} \leqslant 2\delta_r$ dans le cas général, comme on le voit aisément par récurrence.

Compte tenu de ce qui précède, le Théorème 1 est donc démontré avec le Lemme fondamental. Dans un premier temps, nous allons montrer que $\delta_{rs}^{\sigma \cdot \tau} \leqslant \delta_r^{\sigma} + \delta_s^{\tau}$ (3.2 et 3.3); puis nous affinerons cette majoration en étudiant les uns après les autres tous les cas de figure possibles. Il faut remarquer que même $r = s = 2$, $\sigma = \tau = I$ n'est pas simple, le maximum de complexité étant atteint quand δ_s^{τ} est plus grand que 1.

Comme dans l'article précédent (3.3 [3]), on peut regarder la suite $Z_{rs}^{\sigma \cdot \tau}$ comme l'ensemble des rs points: $(v, \sigma \cdot \tau(v))_{0 \leqslant v \leqslant rs-1}$ dans le carré $[0, rs[^2$; l'entier $A([i/rs, j/rs[\,,]M, N[, Z_{rs}^{\sigma \cdot \tau})$ s'interprète alors comme le nombre de points de cet ensemble dans le rectangle $[i, j[\times [M, N[$. Nous utiliserons constamment cette représentation géométrique dans la suite. Soite $J = [i, j[$ un intervalle fixé de $[0, rs]$ (i et j entiers), et soit T l'intervalle d'entiers $[0, rs[$; le rectangle $J \times T_k = J \times [kr, (k+1)r[$ est appelé *tranche* $J \times T_k$; $J \times T$ est la réunion des tranches $J \times T_k$ pour k allant de 0 à $s-1$.

3.2. RÉPARTITION DES TRANCHES $J \times T_k$. L'intervalle $J = [i, j[$ étant donné, on a $i = ps + u$ et $j = qs + v$ avec $0 \leqslant u \leqslant s-1$, $0 \leqslant v \leqslant s-1$, $0 \leqslant p \leqslant r-1$, $0 \leqslant q \leqslant r-1$. Selon les valeurs de u et v, les tranches $J \times T_k$ se répartissent en 1, 2, ou 3 catégories:

(i) *cas où* $u = v = 0$; les points de $Z_{rs}^{\sigma \cdot \tau}$ qui appartiennent à $J \times T_k$ sont les points:

$$(sp + \tau(k), kr + \sigma^{-1}(p)), \ldots, (s(q-1) + \tau(k), kr + \sigma^{-1}(q-1));$$

Toutes les tranches $J \times T_k$ sont identiques en ce sens qu'on a les mêmes ordonnées pour les points de $Z_{rs}^{\sigma,\tau}$ à translation d'un multiple de r près; donc *une seule catégorie.*

(ii) *cas où* $u = 0$ ou $v = 0$, l'autre n'étant pas nul:

— si $u = 0$, le point $(s(q-1) + \tau(k), kr + \sigma^{-1}(q-1))$ appartient à $J \times T_k$ ou non selon que $\tau(k) < v$ où $\tau(k) \geqslant v$;

— si $v = 0$, le point $(sp + \tau(k), kr + \sigma^{-1}(p))$ appartient à $J \times T_k$ ou non selon que $\tau(k) \geqslant u$ ou $\tau(k) < u$; ici, on a donc *deux catégories* de tranches $J \times T_k$ dont les écarts diffèrent d'une unité, car elles diffèrent par un seul point.

(iii) *cas où* $u = v \neq 0$; les tranches $J \times T_k$ ont le même écart, elles se répartissent en *deux catégories* et diffèrent par 2 points d'une catégorie à l'autre.

(iv) *cas où* $u \neq v$, $u \neq 0$, $v \neq 0$: on a alors *3 catégories* de tranches: les tranches de deux de ces catégories ont le même écart et celle de la troisième ont un écart qui diffère d'une unité. Par exemple si $v > u$:

— il y a les tranches $J \times T_k$ telles que $u \leqslant \tau(k) < v$ qui contiennent les deux points évoqués en (ii);

— il y a les tranches $J \times T_k$ telles que $\tau(k) < u$ qui contiennent le point d'abscisse $q(q-1) + \tau(k)$ et pas l'autre;

— il y a les tranches $J \times T_k$ telles que $v \leqslant \tau(k)$ qui contiennent le point d'abscisse $sp + \tau(k)$ et pas l'autre.

Remarque. Les écarts des tranches $J \times T_k$ sont égaux ou non selon que $v - u = 0$ ou non. On peut noter également que si $s = 2$, il n'y a évidemment que deux catégories possibles puisqu'il n'y a que 2 tranches; c'est le seul cas: dès que $s \geqslant 3$, les 3 catégories existent.

3.3. Première majoration de $\delta_{rs}^{\sigma,\tau}$, Soient $J = [i, j[$, $J' = [i', j'[$ de même longueur et N un entier entre 1 et rs; on a donc $N = Kr + H$ avec $0 \leqslant K \leqslant s-1$ et $1 \leqslant H \leqslant r$. Le rectangle $J \times [0, N[$ se compose de K tranches de hauteur r et du rectangle $J \times [Kr, N[$ de hauteur H, partie d'une tranche de hauteur r.

— D'après la remarque en fin de 3.2, il y a K tranches dans $J' \times T$ de mêmes écarts que les K tranches de $J \times [0, N[$; leur répartition dépend de la permutation τ de sorte qu'elles forment au plus δ_s^τ rectangles disjoints 2 à 2; notons ces rectangles $J' \times S_l$ pour l allant de 1 à d, avec $d \leqslant \delta_s^\tau$; un S_l est donc un intervalle réunion d'intervalles adjacents de la forme $[\mu r, (\mu+1) r[$.

— Il y a aussi dans $J' \times T$ une tranche $J' \times S'$ de même écart que $J \times [Kr, K(r+1)[$, distincte des précédentes; dans ces deux tranches, c'est la permutation σ qui règle la répartition des points de $Z_{rs}^{\sigma \cdot \tau}$, et on a donc au plus δ_r^σ intervalles $S'_h \subset S'$, h allant de 1 à d' avec $d' \leqslant \delta_r^\sigma$, tels que l'écart de $J \times [Kr, N[$ soit égal à l'écart de $J' \times \bigcup_{h=1}^{d'} S'_h$.

— Au total, on a donc $d + d'$ rectangles dont la somme des écarts est égale á l'écart de $J \times [0, N[$ et dont la somme des hauteurs vaut N; d'où $\delta_{rs}^{\sigma \cdot \tau} \leqslant \delta_r^\sigma + \delta_s^\tau$.

On peut écrire en conclusion de ce sous-paragraphe que

$$E(J, N, Z_{rs}^{\sigma \cdot \tau}) = E\left(J', \bigcup_{l=0}^{d} S_l, Z_{rs}^{\sigma \cdot \tau}\right)$$

avec • $S_0 = \bigcup_{h=1}^{d'} S'_h$, $d' \leqslant \delta_r^\sigma$, $|S_0| = H$;

• $d \leqslant \delta_s^\tau$, S_l intervalle réunion d'intervalles de la forme $[\mu r, (\mu + 1) r[$ pour $l \geqslant 1$, $|\bigcup_{l=1}^{d} S_l| = Kr$.

3.4. Répartition des rectangles $J' \times S_l$. d est le nombre minimum de rectangles (réunions de tranches) nécessaires pour réaliser $E(J, Kr) = E(J', \bigcup_{l=1}^{d} S_l)$; en général il n'y a pas unicité de la décomposition $(S_l)_{1 \leqslant l \leqslant d}$; on peut toujours supposer qu'on a pris une décomposition telle que $J' \times S_1$ est maximum (c'est-à-dire ne peut être agrandi par adjonction de tranches adjacentes): sinon on l'agrandit en amputant les $J' \times S_l$ pour $l \geqslant 2$, jusqu'à le rendre maximum; dans cette opération d n'augmente pas, et il ne peut diminuer car c'est le nombre minimum de rectangles nécessaires.

— Désignons par B_l et C_l les tranches extrêmes de $J' \times S_l$ et par A_l et D_l respectivement les tranches adjacentes avant B_l et après C_l; on ne distingue pas des tranches de même écart pour réaliser les S_l (voir 3.3), de sorte qu'avec S_1 on a seulement deux possibilités pour les écarts de A_1, B_1, C_1, D_1: e ou $e' = e + 1$ (voir 3.2). Cela donne $2^4 = 16$ possibilités réduites à $(16 - 4)/2 + 4 = 10$ par symétrie; examinons-les.

— *Le cas eeee* correspond à $d = 1$ si toutes les tranches ont même écart; sinon, il n'est pas à envisager car, par translation, on se ramène à *e'eee*, *eee'e*, ou *e'ee'e*; de même pour le cas *e'e'e'e'*.

Les cas eeee', *e'e'e'e*, *ee'ee'*, *eee'e'* entraînent tous $d = 1$ (sinon $J' \times S_1$ n'est pas maximum).

Le cas ee'e'e entraîne la même configuration pour les intervalles S_l sauf peut être le dernier, pour lequel on peut avoir *ee'e'e* ou *ee'e'e'* (la raison est toujours la même: sinon S_1 peut être agrandi en amputant un des S_l).

Même propriété pour *le cas e'eee'*, en échangeant e et e'.

Le cas *ee'ee* entraîne la configuration *ee'e'e* pour tous les autres S_l $(l \geqslant 2)$ sauf peut-être le dernier, pour lequel on peut avoir *ee'e'e* ou *ee'e'e'*.

Même propriété pour *le cas e'ee'e'*.

— On voit que dans plusieurs can on a seulement $d=1$, ce qui est toujours réalisé de toutes façons quand $\delta_s^\tau=1$. Nous allons donc traiter le cas $d=1$ (3·6), puis nous examinerons les cas où $d>1$ à la lumière de celui-ci (3.7).

Les tranches A_l, B_l, C_l, D_l associées à S_l peuvent être, selon le cas, dans 1,2, ou 3 catégories que nous désignerons par les chiffres 1, 2, 3 en convenant que 2 et 3 correspondent à celles d'écarts égaux (pour fixer les idées, les tranches des catégories 2 et 3 sont d'écart e et celles de la catégorie 1 d'écart $e'=e+1$, par exemple (voir 3.2)).

— Notons que le cas où $J' \times S_l$ ne comporte qu'une seule tranche correspond au cas où B_l et C_l sont de même catégorie; de même pour le cas où A_1 et D_1 sont confondues.

Avant d'aborder le cas $d=1$, donnons un lemme qui sera utilisé en cours de démonstration.

3.5. Théorème de valeurs intermédiaires. Ce lemme est destiné à assurer l'existence d'un rectangle d'écart donné e quand on a des rectangles dont les écarts encadrent e; il est valable pour toute suite Z_r^σ.

Soient J, T', T'' des intervalles de $[0, r[$ tels que $|T'|=|T''|=\lambda$; alors pour tout v entier compris entre $A(J, T')$ et $A(J, T'')$ il existe au moins deux intervalles S' et S'' de $[0, r[$ tels que $|S'|=|S''|=\lambda$ et $A(J, S')=A(J, S'')=v$.

La démonstration est très simple: la fonction $S \to A(J, S)$ est à valeurs entières; la translation d'une unité de S fait perdre ou gagner au plus un point de Z_r^σ; sur $[0, r[=\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}$ on dispose de deux trajets possibles pour atteindre T'' à partir de T', d'où $A(J, S)$ passe 2 fois par toutes les valeurs intermédiaires entre $A(J, T')$ et $A(J, T'')$.

3.6. Étude du cas particulier $d=1$. Ce cas donne le Théorème 1 pour les suites S_r^I de Van Der Corput.

3.6.1. *Méthode.* Les notations sont celles des Sections 3.3 et 3.4; nous allons montrer qu'avec $S_1=S$ et deux intervalles S'_h, S'_k de S_0, on peut obtenir deux rectangles R et R' de $J' \times T$, de hauteur $|S \cup S'_h \cup S'_h|$, tels que

$$E(J', (S \cup S'_h \cup S'_k)) = E(R \cup R');$$

nous reviendrons après sur le cas particulier d'un seul intervalle S'_h, ainsi que sur le cas $s=2$ (voir 3.6.17).

— Désignons par A, B, C, D les quatre tranches associées à $J' \times S$ et par E la tranche contenant $J' \times S_0$; le découpage qui permet d'obtenir R et R' dépend de la nature des tranches A, B, C, D, E (de catégorie 1, 2, ou 3) de sorte qu'on a, a priori, $3^5 = 243$ cas à envisager; mais parmi les 81 cas correspondant à $ABCD$, on peut déjà éliminer ceux qui se retrouvent par symétrie (par exemple 1112 et 2111 se traitent de la même façon en tournant dans un sens ou l'autre sur le tore); il n'y a donc en fait que $(81-9)/2+9=45$ cas pour $ABCD$. De plus, les tranches des catégories 2 et 3 ont mêmes écarts et mêmes propriétés vis-à-vis des tranches de la catégorie 1 (voir Sect. 3.2); pour $ABCD$, les cas obtenus par échange de 2 et 3 se traitent donc de façon identique (par exemple 1112 et 1113); cela élimine 17 cas (1113, 1131, 1132, 1133, 11312, 1313, 1322, 1323, 1331, 1332, 1333, 3113, 3123, 3133, 3223, 3233, et 3333). Enfin la conjonction des deux arguments précédents permet d'éliminer encore 3 cas (2213, équivalent à 2133; 2313, équivalent à 2123 et 2333, équivalent à 2223). Il reste donc 25 cas pour $ABCD$, c'est-à-dire $3 \times 25 = 75$ cas au total.

— Notons que l'éventualité d'une ou deux catégories de tranches se trouve envisagée dans le cas général quand $ABCD$ sont dans une ou deux catégories seulement; de même le cas où $J' \times S$ est réduit à une tranche coïncide avec celui où B et C sont de même catégorie (idem pour $A = D$).

— Dernières conventions avant l'examen des cas qui restent: on écrit la tranche E sous la forme $E = X \cup V \cup Y \cup W \cup Z$ avec $V = J' \times S'_h$ et $W = J' \times S'_k$; le translaté de X dans la tranche A est noté X_A (de même pour les autres); on désigne par α et β les points par lesquels diffèrent les tranches des 3 catégories: α est dans les tranches des catégories 1 et 2 et β est dans celles des catégories 1 et 3 (voir 2.3); pour plus de commodité, l'écart d'un rectangle R est désigné par $\hat{R}$, et on écrit S au lieu de $J' \times S$.

Dans la mesure du possible, nous avons regroupé les cas qui se traitent de la même façon.

3.6.2. *Cas où A, C, E ou B, D, E sont de même catégorie (15 cas).* Pour A, C, E, il suffit de prendre $R = W_A \cup Z_A \cup (S \backslash Z_C)$ et $R' = V_E$, ou $R = (A \backslash X_A) \cup (S \backslash (Y_C \cup W_C \cup Z_C))$ et $R' = W_E$. Pour B, D, E, on prend, par exemple, $R = (S \backslash X_B) \cup X_D \cup V_D$ et $R' = W_E$. Ces cas sont: 1111, 1; 1112, 1; 1121, 1; 1212, 1 ou 2; 1213, 1; 1222, 2; 1232, 2; 2122, 2; 2123, 2; 2222, 2; 2223, 2; 2232, 2; 2323, 2 ou 3.

3.6.3. *Cas où A et C sont de même catégorie et où E diffère d'un point.* (*idem avec B et D*; 17 *cas en tout*). Avec A et C, on a $\hat{V}_A$ ou $\hat{W}_A$ inchangé (i.e., $\hat{V}_A = \hat{V}$ ou $\hat{W}_A = \hat{W}$). Si c'est $\hat{V}_A$ on prend $R = (A \backslash X_A) \cup S \backslash (Y_C \cup W_C \cup Z_C))$ et $R' = W_E$; si c'est $\hat{W}_A$, on prend $R = W_A \cup Z_A \cup (S \backslash Z_C)$ et $R' = V_E$. Ces cas sont: 1111, 2 ou 3; 1112, 2 ou 3; 1121, 2 ou 3; 1212, 3; 1213, 2 ou 3; 1222, 1; 1232, 1, 2122, 1; 2123, 1; 2222, 1; 2223, 1; 2232, 1; 2323, 1. (Noter que le premier et les 4 derniers peuvent en fait ne pas être envisagés en vertu de la Section 3.4.)

3.6.4. *Cas restant à traiter avec les tranches ABCD ci-dessus* (7 *cas*):

— *Cas* 1222, 3:

- si $\hat{V}_D = \hat{V}$ on prend $R = (S \backslash X_B) \cup X_D \cup V_D$ et $R' = W_E$;
- si $\hat{W}_D = \hat{W}$ on prend $R = (S \backslash (X_B \cup V_B \cup Y_B)) \cup (D \backslash Z_D)$ et $R' = V_E$;
- sinon, on a soit $\alpha \in V_D$ et $\beta \in W_E$, soit $\alpha \in W_D$ et $\beta \in V_E$; on prend alors soit $R = W_A \cup Z_A \cup (S \backslash Z_C)$ soit $R = (A \backslash X_A) \cup (S \backslash (Y_C \cup W_C \cup Z_C))$.

— *Cas* 1232, 3. Ce cas se traite comme ci-dessus sauf quand $\alpha \in W_D$ et $\beta \in V_E$; il faut alors couper S en deux parties S' et S'' définies comme suit: S' réunion de tranches de catégories 1 ou 2, d'extrémités B et F; S'' réunion de tranches de catégorie 3, d'extrémités G et C; on prend alors:

$$R = W_A \cup Z_A \cup (S' \backslash Z_F) \qquad \text{et} \qquad R' = (S'' \backslash X_G) \cup X_D \cup V_D;$$

il en résulte que $\hat{R} = \hat{S}' + \hat{W} + 1$ et $\hat{R}' = \hat{S}'' + \hat{V} - 1$ d'où la propriété attendue pour R et R' (voir 3.6.1).

— *Cas* 2122, 3. Comme ci-dessus, le cas où $\alpha \in V_A$ et $\beta \in W_E$ exigeant la partition de S en S' et S''.

— *Cas* 2123, 3. Si $\alpha \notin X_B$ on prend $R = (S \backslash X_B) \cup X_D \cup V_D$, sinon on a soit $\hat{V}_A = \hat{V}$, soit $\hat{W}_A = \hat{W}$ et on termine comme ci-dessus (3.6.3).

— *Les cas* 2222, 3; 2223, 3; 2232, 3 ne sont pas à envisager car alors $d = 1$, et on a le choix pour la tranche E entre les catégories 2 et 3 (néanmoins, on peut les traiter de façon analogue aux cas précédents). A ce stade, il reste $75 - 39 = 36$ cas à examiner; certains relèvent du Lemme 3.5, d'autres se traitent comme ci-dessus et d'autres encore demandent un nouveau procédé. Plutôt que les regrouper, nous avons préféré les envisager dans l'ordre où ils se présentent.

3.6.5. *Cas* 1122 (*simple*). — *Cas* 1122, 1: si $\beta \in Z_A$ on prend $R = (S \backslash X_B) \cup X_D \cup V_D$, sinon $R = W_A \cup Z_A \cup (S \backslash Z_C)$.

— *Cas* 1122, 2: comme ci-dessus selon que $\beta \in X_A$ ou non.

— *Cas* 1122, 3:

- si α et $\beta \notin W_A \cup Z_A$, on prend $R = W_A \cup Z_A \cup (S \backslash Z_C)$;
- si α et $\beta \notin X_A \cup V_A$, on prend $R = (S \backslash X_B) \cup X_D \cup V_D$;
- si $\alpha \in W_A \cup Z_A$ et $\beta \in X_A \cup V_A$, on prend $R = W_A \cup Z_A \cup (S \backslash Z_C)$ si $\alpha \in Z_A$, et $R = (S \backslash (X_B \cup V_B \cup Y_B)) \cup (D \backslash Z_D)$ si $\alpha \in W_A$;
- si $\alpha \in X_A \cup V_A$ et $\beta \in W_A \cup Z_A$, on procède comme ci-dessus selon que $\beta \in W_A$ ou $\beta \in Z_A$.

3.6.6. *Cas* 1123 (*relève du Lemme* 3.5).—*Cas* 1123, 1.

- si $\beta \notin Z_A$, on prend $R = W_A \cup Z_A \cup (S \backslash Z_C)$;
- si $\beta \in Z_A$ et $\alpha \notin X_A \cup V_A$, on prend $R = (S \backslash X_B) \cup X_D \cup V_D$;
- si $\beta \in Z_A$ et $\alpha \in X_A \cup V_A$, soit $R_1 = W_A \cup Z_A \cup (S \backslash Z_C)$ et $R_2 = (S \backslash (X_B \cup V_B \cup Y_B)) \cup (D \backslash Z_D)$; on a alors $\hat{R}_1 = \hat{W} + \hat{S} + 1$ et $\hat{R}_2 = \hat{S} + \hat{W} - 1$; et *par le Lemme* 3.5 on obtient un rectangle R tel que $\hat{R} = \hat{W} + \hat{S}$, ce qu'on cherchait.

— *Cas* 1123, 2:

- si $\beta \notin W_A \cup Z_A$, on prend $R = W_A \cup Z_A \cup (S \notin Z_C)$;
- si $\beta \in W_A \cup Z_A$ et $\alpha \notin X_A \cup V_A$, on prend $R = (S \backslash X_B) \cup X_D \times V_D$,
- sinon, soit $R_1 = W_A \cup Z_A \cup (S \backslash Z_C)$ et $R_2 = (S \backslash (X_B \cup V_B \cup Y_B) \cup (D \backslash Z_D)$; alors $\hat{R}_1 = \hat{S} + \hat{W} + 1$,
  et $\hat{R}_2 = \hat{S} + \hat{W}$ si $\beta \in W_A$, $\hat{R}_2 = \hat{S} + \hat{W} - 1$ si $\beta \in Z_A$; en ce dernier cas, on termine en appliquant le Lemme 3.5.

— *Cas* 1123, 3:

- si $\alpha \notin X_A$, $R = (S \backslash X_B) \cup X_D \cup V_D$;
- si $\alpha \in X_A$ et $\beta \notin Z_A$, $R = W_A \cup Z_A \cup (S \backslash Z_C)$;
- si $\alpha \in X_A$ et $\beta \in Z_A$, $R_1 = W_A \cup Z_A \cup (S \backslash Z_C)$,
  $R_2 = (S \backslash (X_B \cup V_B \cup Y_B)) \cup (D \backslash Z_D)$ et Lemme 3.5.

3.6.7. *Cas* 1121 (*simple*).—*Cas* 1221, 1: si $\beta \notin X_A$, $R = (S \backslash X_B) \cup X_D \cup V_D$ et si $\beta \in X_A$, $R = (A \backslash X_A) \cup (S \backslash (Y_C \cup W_C \cup Z_C))$ (ou $R = W_A \cup Z_A \cup (S \backslash Z_C)$).

— *Cas* 1221, 2: Même raisonnement selon que $\beta \notin X_A \cup V_A$ ou $\beta \notin W_A \cup Z_A$.

— *Cas* 1221, 3:

- si $\alpha \notin W_A$ et $\beta \notin Z_A$, $R = W_A \cup Z_A \cup (S \backslash Z_C)$;
- si $\alpha \notin W_A$ et $\beta \in Z_A$, $R = (S \backslash (X_B \cup V_B \cup Y_B)) \cup (D \backslash Z_D)$;
- si $\alpha \in W_A$, alors $\alpha \notin V_A$ et on fait le même raisonnement.

3.6.8. *Cas* 1223 (*relève du Lemma* 3.5).—*Cas* 1223, 1:

- si $\beta \notin Z_A$, $R = W_A \cup Z_A \cup (S \backslash Z_C)$;
- si $\beta \in Z_A$ et $\alpha \notin X_A \cup V_A$, $R = (S \backslash X_B) \cup X_D \cup V_D$;
- si $\beta \in Z_A$ et $\alpha \in X_A \cup V_A$, $R_1 = (S \backslash X_B) \cup X_D \cup V_D$,
  $R_2 = (A \backslash X_A) \cup (S \backslash (Y_C \cup W_C \cup Z_C)$ et Lemme 3.5.

— *Cas* 1223, 2: Se traite comme le cas 1123, 2 (voir 3.6.6).

— *Cas* 1223, 3:

- si $\beta \notin X_D$ et $\alpha \notin X_B$ ou si $\beta \in X_D$ et $\alpha \in X_B$, $R = (S \backslash X_B) \cup X_D \cup V_D$;
- si $\beta \in X_D$ et $\alpha \notin X_B$, on prend $R = (A \backslash X_A) \cup (S \backslash (Y_C \cup W_C \cup Z_C))$ si $\hat{V}_A = \hat{V}$ et $R = W_A \cup Z_A \cup (S \backslash Z_C)$ si $\hat{W}_A = \hat{W}$.
- si $\beta \notin X_D$ et $\alpha \in X_B$, on prend $R = W_A \cup Z_A \cup (S \backslash Z_C)$ si $\beta \in Z_D$ et sinon on applique le Lemme 3.5 aux rectangles $R_1 = (S \backslash X_B) \cup X_D \cup V_D$ et $R_2 = (A \backslash X_A) \cup (S \backslash (Y_C \cup W_C \cup Z_C))$.

3.6.9. *Cas* 1231 (*partition de S*). — *Cas* 1231, 1:

- si $\beta \notin X_A$, $R = (S \backslash X_B) \cup X_D \cup V_D$;
- si $\beta \in X_A$ et $\alpha \notin Z_A$, $R = W_A \cup Z_A \cup (S \backslash Z_C)$;
- si $\beta \in X_A$ et $\alpha \in Z_A$, $R = W_A \cup Z_A \cup (S' \backslash Z_F)$ et $R' = (S'' \backslash X_G) \cup X_D \cup V_D$, on a alors $\hat{R} = \hat{S}' + \hat{W}$ et $\hat{R}' = \hat{S}'' + \hat{V}$. (voir 3.6.4, cas 1232, 3).

— *Cas* 1231, 2:

- si $\beta \notin X_D \cup V_D$, $R = (S \backslash X_B) \cup X_D \cup V_D$;
- si $\beta \in X_D \cup V_D$ et $\alpha \notin W_A \cup Z_A$, $R = W_A \cup Z_A \cup (S \backslash Z_C)$;
- si $\beta \in X_D \cup V_D$ et $\alpha \in W_A \cup Z_A$, $R = W_A \cup Z_A \cup (S' \backslash Z_F)$ et $R' = (S'' \backslash X_G) \cup X_D \cup V_D$.

— *Cas* 1231, 3 comme le précédent, par symétrie.

3.6.10. *Cas* 1233 (*Partition de S*). — *Cas* 1233, 1: même raisonnement que pour 1231, 1 selon que $\alpha \in Z_A$ ou non et que $\beta \in X_A$ ou non.

— *Cas* 1233, 2: ce cas se ramène à un autre cas par translation à droite d'une tranche (il peut cependant être traité tel quel, quoique assez compliqué).

— *Cas* 1233, 3:

- si $\alpha \notin W_A \cup Z_A$, $R = W_A \cup Z_A \cup (S \backslash Z_C)$;
- si $\alpha \in W_A \cup Z_A$ et $\beta \notin X_A$, $R = (S \backslash X_B) \cup X_D \cup V_D$;
- sinon, $R = (S'' \backslash (X_G \cup V_G \cup Y_G)) \cup (D \backslash Z_D)$ et

$$R' = (A \backslash X_A) \cup (S' \backslash (Y_F \cup W_F \cup Z_F)).$$

3.6.11. *Cas* 2112 (*simple*).—*Cas* 2212, 1: si $\beta \notin X_D \cup V_D$, $R = (S \backslash X_B) \cup X_D \cup V_D$ et sinon $R = W_A \cup Z_A \cup (S \backslash Z_C)$.

— *Cas* 2112, 2: si $\beta \notin X_D$, $R = (S \backslash X_B) \cup X_D \cup V_D$ et sinon $R = (A \backslash X_A) \cup (S \backslash (Y_C \cup W_C \cup Z_C))$.

— *cas* 2112, 3:

- si $\hat{V}_A$ ou $\hat{W}_A$ sont inchangés, par exemple $\hat{W}_A$, on prend $R = W_A \cup Z_A \cup (S \backslash Z_C)$ ou $R = (S \backslash (X_B \cup V_B \cup Y_B)) \cup (D \backslash Z_D)$ selon que $\beta \notin Z_A$ ou non;
- si $\hat{V}_A$ et $\hat{W}_A$ sont changés, on raisonne comme pour le Cas 1222, 3 (voir 3.6.4).

3.6.12. *Cas* 2113 (*nouveau découpage*).—*Cas* 2113, 1:

- si $\beta \notin W_A \cup Z_A$, $R = W_A \cup Z_A \cup (S \backslash Z_C)$;
- si $\alpha \notin X_D \cup V_D$, $R = (S \backslash X_B) \cup X_D \cup V_D$;
- sinon, il faut considérer deux tranches adjacentes L et M, hors de S, respectivement de catégorie 2 et 1 ou 3 (il y en a forcément, vu les catégories de A et D); $R = S \backslash (X_B \cup Z_C)$ et $R' = V_L \cup X_L \cup Z_M \cup W_M$ conviennent.

— *Cas* 2113, 2 *et* 2113, 3 (symétrique):

- si $\beta \notin Z_A$, $R = W_A \cup Z_A \cup (S \backslash Z_C)$;
- si $\beta \in Z_A$ et $\alpha \notin X_A \cup V_A$, $R = (S \backslash X_B) \cup X_D \cup V_D$;
- sinon on procède comme ci-dessus avec L et M.

3.6.13. *Cas* 2132 (*relève du Lemme* 3.5).—*Cas* 2132, 1: $\beta \notin X_B \cup V_B$ et $\beta \in X_B \cup V_B$ avec $\alpha \notin Z_B$ sont simples; pour le cas restant, on pose $R_1 = W_A \cup Z_A \cup (S \backslash Z_C)$ et $R_2 = (S \backslash (X_B \cup V_B \cup Y_B)) \cup (D \backslash Z_D)$, et on applique le Lemme 3.5, car $\hat{R}_1 = \hat{S} + \hat{W} + 1$ et $\hat{R}_2 = \hat{S} + \hat{W} - 1$.

— *Cas* 2132, 2: comme le précédent, quand $\beta \in X_B$ et $\alpha \in Z_A$.

— *Cas* 2132, 3: avec le Lemme 3.5 quand $\alpha \in W_B \cup Z_B$ et $\beta \in X_B \cup V_B$ et simplement dans les autres cas.

3.6.14. *Cas* 2133. A quelques détails près, les 3 cas se traitent comme en 3.6.12, en ayant recours aux tranches L et M.

3.6.15. *Cas* 2233. Ces cas se traitent comme en 3.6.9 ou 3.6.12 selon la situation de α et β (2233, 1 n'est d'ailleurs pas à envisager).

3.6.16. *Cas* 2332. Se traite avec le lemme 3.5 dans les 3 cas deux d'entre eux (1 et 3) n'étant d'ailleurs pas à envisager.

3.6.17. *Conclusion.* Si on a au moins 2 intervalles S'_h, S'_k, c'est-à-dire (voir 3.3) si $d' \geqslant 2$, on vient donc de montrer que le nombre de rectangles nécessaires est égal à d' (au lieu de $1 + d'$ comme en 3.3), donc est majoré par δ_r^σ, ici supérieur ou égal à 2.

— Si $d' = 1$, on n'a qu'un seul intervalle, et alors, pour de nombreux cas (par exemple 1223, 3), on n'arrive pas à obtenir un seul rectangle R

(avec $r=s=3$, on voit directement que, pour $J=[0,2[$, $J'=[2,4[$, et $N=4$, il faut bien deux rectangles); on reste donc à $d+d'=2$; ce phénomène se produit quand on a 3 catégories de tranches, donc dès que $s\geqslant 3$, et donne en ce cas, soit la formule $\delta_{rs}^{\sigma\cdot\tau}=\delta_r^\sigma$ si $\delta_r^\sigma\geqslant 2$, soit la formule $\delta_{rs}^{\sigma\cdot\tau}=2$ si $\delta_r^\sigma=1$; cela correspond bien au (ii) du Lemme fondamental dans le cas $\delta_s^\tau=1$.

— Par contre, pour $s=2$, on n'a que deux tranches, ce qui réduit l'étude aux Cas 1111, 1 (3.6.2); 1221, 1 (3.6.11); 2112, 2 (3.6.7) et 2332, 2 (3.6.16). Et précisément, ces cas donnent un seul rectangle R à partir d'un seul intervalle S'_h; ce qui explique la formule (i) du Lemme fondamental: $\delta_{rs}^{\sigma\cdot\tau}=\delta_r^\sigma$, et en particulier $\delta_{rs}^{\sigma\cdot\tau}=1$ si $\delta_r^\sigma=1$.

Notons qu'un des cas cités (3.6.16) se traite par le Lemme 3.5, ce qui fait que, même pour la suite de VDC en base 2, S_2^I, on n'a pas toujours explicitement l'intervalle cherché.

3.7. ÉTUDE DU CAS $d>1$. Conformément à la Section 3.4, il suffit d'étudier les 4 cas où $A_1B_1C_1D_1$ est de la forme $e'eee'$, $ee'e'e$, $e'ee'e'$, $eee'e$. On a remarqué qu'alors les $A_lB_lC_lD_l$ associés à S_l, pour $2\leqslant l\leqslant d$, sont imposés sauf éventuellement le dernier. La méthode consiste à traiter 2 intervalles S'_h, S'_k de S_0 avec chaque S_l comme on l'a fait en 3.6 pour S_1, jusqu'à épuisement de l'un des 2 ensembles (les S'_h ou les S_l); on en déduit la formule (ii) du Lemme fondamental; mais il faut tenir compte de 2 choses: d'une part les tranches qui bordent un $J'\times S_l$ peuvent être confondues avec celles qui bordent d'autres $J'\times S_l$; d'autre part, les Cas 3.6.12, 14, 15 font intervenir d'autres tranches que celles comprises entre A_l et D_l et demandent donc une attention particulière.

3.7.1. *Cas $e'eee'$ pour $A_1B_1C_1D_1$*. Ces cas se réduisent à 1221 ou 1231 pour les S_l tels que $1\leqslant l\leqslant d$, S_d pouvant donner 1221, 1222, 1223, 1231, 1232, ou 1233 (et les mêmes avec échange de 2 et 3). Ils relèvent des numéros 3.6.7 à 3.6.10 et selon E, de 3.6.2, 3 ou 4. En cours d'opération, dans la suite des rectangles $J'\times S'_h$ restant à traiter, on a le choix pour prendre V et W: soit les deux plus près de l'une des extrémités de E, soit un à chacune d'elles; de sorte que même si les tranchés A_l et D_l servent chacune deux fois, on n'a jamais de recoupement quand on effectue les translations imposés par le cas suivant. On a intérêt à commencer par S_d, qui présente plus de variété, le Cas 1233, 2 étant ici traité directement en choisissant V de sorte que $\beta\notin V_A$, ce qui simplifie son étude. Nous ne détaillons pas les différentes situations.

3.7.2. *Cas $e'ee'e'$ pour $A_1B_1C_1D_1$*. Toujours d'après 3.4, pour $1<l<d$, les S_l donnent ici 1221 ou 1231, S_d étant aussi comme en 3.7.1; on est donc dans la même situation, sauf pour S_1 qui correspond à 1211; ce dernier cas

relève de 3.6.2 ou 3.6.3, d'où on reste dans les mêmes numéros qu'en 3.7.1, et le traitement est le même.

3.7.3. *Cas ee'e'e pour* $A_1B_1C_1D_1$. Ces cas se limitent à 2112, 2113 ou 3113 pour les S_l tels que $1 \leqslant l < d$, S_d pouvant de plus donner 2111 ou 3111.

Quand $d = 1$, il arrive que le Cas 2113 (3.6.12) demande deux tranches adjacentes L et M de catégorie 2 et 1 ou 3. Ici, dans ce cas, on peut de plus associer deux S_l analogues pour traiter deux S'_h en obtenant deux rectangles (par exemple, $ABCD = 2113$ et $A'B'C'D' = 3112$ donnent $R = S_l \backslash (X_B \cup Z_C)$ et $R' = W_{A'} \cup Z_{A'} \cup S_{l'} \cup X_{D'} \cup V_{D'}$). Les autres situations (3.6.11 et 3.6.2) se traitent comme précédemment; l'examen des différentes possibilités montre alors qu'on arrive globalement au même résultat, en faisant parfois mieux (par exemple, si on a seulement une succession des Cas 2113 et 3112): le nombre total des rectangles en fin d'opération est majoré par $\max(d', d + (d' + 1)/2)$.

3.7.4. *Cas eee'e pour* $A_1B_1C_1D_1$. On a ici quatre cas supplémentaires correspondant à S_1: 2212, 2312, 2313, 3312 (et ceux déduits par échange de 2 et 3); ces cas relèvent des numéros 3.6.2, 3 ou 4, 3.6.13 et 3.6.14. Cela n'apporte pas de changement à la méthode décrite en 3.7.3 et on arrive au même résultat.

En définitive, on a étudié tous les cas pouvant se présenter et le lemme fondamental (voir 3.1) est donc démontré.

4. Démonstration du Théorème 2.

La méthode étant la même dans les deux cas, nous nous contenterons de faire la démonstration pour $r \geqslant 3$.

4.1. Majoration. Soit $N \geqslant 1$ et n défini par la condition $r^{n-1} \leqslant N < r^n$; posons $c = b - a$ et soient $a = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j r^{-j-1}$ et $c = \sum_{j=0}^{\infty} \gamma_j r^{-j-1}$ les développements de a et c. Posons $a_n = \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_j r^{-j-1} + r^{-n}$ et $c_n = \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_j r^{-j-1}$; on a alors:

$$|E([a_n, a_n + c_n[\,, N)| - 2 \leqslant |E([a, b[\,, N)|$$
$$\leqslant |E([a_n, a_n + c_n[\,, N)| + 2$$

(car $0 \leqslant a_n - a \leqslant r^{-n}$ et $|a_n + c_n - b| \leqslant r^{-n}$). Or, d'après le Théorème 1, on a au plus $2\delta_r$ intervalles $T_\mu \in \mathscr{C}_n$ tels que $E([a_n, a_n + c_n[\,, N) = E([0, c_n[\,, \cup T_\mu)$; d'où il existe N' compris entre 1 et r^n tel que

$$|E([a, b[\,, N)| \leqslant 4\delta_r |E([0, c_n[\,, N')| + 2.$$

Mais d'après les Lemmes 3.4 et 3.5 de [3] on a la majoration:

$$|E([0, c_n[\,, N')| \leqslant \frac{r+4}{4} U_c(n) + V_c(n) + 1,$$

d'où finalement:

$$|E([a, b[\,, N)| \leqslant \delta_r((r+4)\, U_c(\log_r N) + 4V_c(\log_r N)) + O(1)$$

(car $n \leqslant \log_r N + 1$; le $O(1)$ étant $4\delta_r(r/4+2)+2$).

4.2. MINORATION. — *Cas où $c = b - a$ est r-adique*. Il existe donc n tel que $c = kr^{-n}$. D'après l'étude à l'origine (3.6.2, [3]), il existe N'_n compris entre 1 et r^n tel que

$$|E([0, c[\,, N'_n)| \geqslant \frac{1}{4} U_c(n) + \frac{1}{2}\left(\frac{r-1}{r}\right)^2 V_c(n));$$

d'où d'après le Théorème 1, il existe N_n entre 1 et r^n tel que

$$|E([a, b[\,, N_n)| \geqslant \frac{1}{4\delta_r}\left(\frac{1}{4} U_c(n) + \frac{1}{2}\left(\frac{r-1}{r}\right)^2 V_c(n)\right) - 2.$$

Mais ici, $E([a, b[\,, N) = E([a, b[\,, N - mr^n)$ si N est tel que $mr^n \leqslant N < (m+1)\, r^n$, car $(b-a)$ est r-adique; d'où la minoration a lieu pour une infinité de N et on arrive à $|E([a, b\,[\,, N)| \geqslant (1/16\delta_r)$ $(U_c(\log_r N) + 2((r-1)/r)^2\, V_c(\log_r N)) + O(1)$, pour une infinité de N.

— *Cas où c n'est pas r-adique*. Soit $n \geqslant 1$; d'après l'étude à l'origine il existe N''_n entre 1 et r^n tel que $|E([0, c_n[\,, N''_n)| \geqslant \frac{1}{4} U_c(n) + \frac{1}{2}((r-1)/r)^2\, V_c(n)$; et d'après le Théorème 1, il existe N'_n entre 1 et r^n tel que

$$|E([a_n, a_n + c_n[\,, N'_n)| \geqslant \frac{1}{4\delta_r} |E([0, c_n[\,, N''_n)|;$$

d'où

$$|E([a, b[\,, N'_n)| \geqslant \frac{1}{16\delta_r} (U_c(n) + 2\left(\frac{r-1}{r}\right)^2 V_c(n)) - 2.$$

On termine alors comme en 3.6.3, [3] pour obtenir une suite strictement croissante (N_n) vérifiant la même propriété; cela achève la démonstration du Théorème 2.

REFERENCES

1. P. BOHL, Über eine in der Theorie der Säkularen Störungen vorkommendes Problem, *J. Reine Angew. Math.* **135** (1909).
2. H. FAURE, Discrépances de suites associées à un système de numération (en dimension un), *Bull. Soc. Math. France* **109** (1981), 143–182.
3. H. FAURE, Étude des restes pour les suites de Van Der Corput généralisées, *J. Number Theory* **16**, No. 3 (1983), 376–394.
4. P. HELLEKALEK, Regularities in the distribution of special sequences, *J. Number Theory* **18** (1984), 41–55.